Calculer une base orthonormée (bon) de W

Dans ce cas

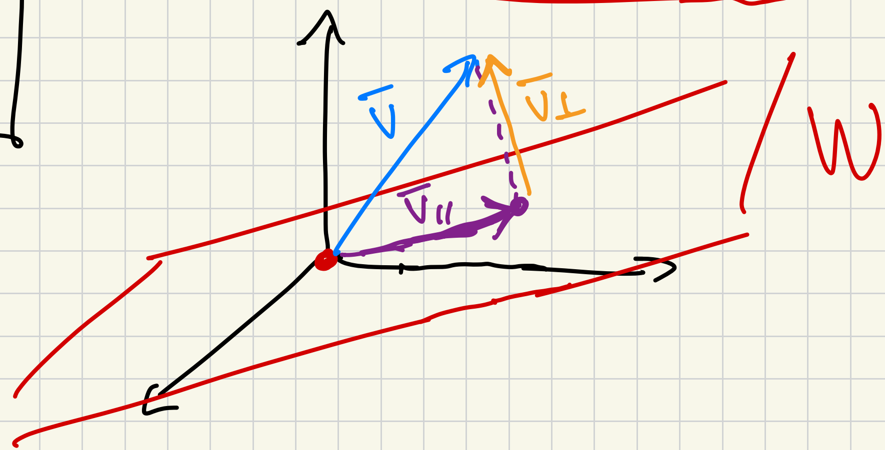
$$\left\{ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{base orthogonale de } W$$

$$\left\{ \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ et } \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ 0 \\ 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \end{pmatrix} \right\} \text{b.o.n. de } W$$

Projection orthogonale de $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ sur un

SEV $W \subseteq \mathbb{R}^n$

Idée



Motivation

On veut trouver le point $\bar{w} \in W$ le plus proche de $\bar{v} \in \mathbb{R}$?!

THM 11.48 Soit W un SEV de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Alors, il existe des uniques vecteurs $\bar{v}_\perp \in W^\perp$ et $\bar{v}_\parallel \in W$ tels que

$$\bar{v} = \underbrace{\bar{v}_\perp}_{\in W^\perp} + \underbrace{\bar{v}_\parallel}_{\in W}$$

En plus $\bar{v}_\parallel$ satisfait à la propriété suivante

$$\|\bar{v} - \bar{v}_\parallel\| = \min\{\|\bar{v} - \bar{u}\| : \bar{u} \in W\}$$

et c'est l'unique vecteur de W qui satisfait à .

Notation et terminologie $\bar{v}_\parallel$ est appelé la projection orthogonale de $\bar{v}$ sur W et elle est

└ notée $\text{proj}_W(\bar{v})$.

PROP 11.49 Soit W un SEV de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ une base orthogonale de W. Alors

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2}\bar{v}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2}\bar{v}_2 + \dots + \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}_k}{\|\bar{v}_k\|^2}\bar{v}_k$$

Exemple 11.50 Soit $W = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Calculer $\operatorname{proj}_W \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. !

base orthogonale !

Donc ça

$$\operatorname{proj}_W \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/5 \\ -2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{EXM}}$ Soit $W = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

Calculer $\mathrm{proj}_W \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

① Base de W :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{matrix} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{OEL}]{} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

pivots

FER

colonne-pivots

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$ base de W.

② Base de W → Base orthogonale de W (GS)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \text{base orthogonale de } W$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

③ $\underline{\mathrm{proj}_W \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$:

$$\mathrm{proj}_W \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{4}{21}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\\0\end{pmatrix} = \dots$$

$\square$

Porisme (Corollaire) 11.51 Soit W un SEV de $\mathbb{R}^n$. Alors l'application $\mathrm{proj}_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\bar{v} \longmapsto \mathrm{proj}_W(\bar{v})$$

est linéaire. Si $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$ est base orthonormée de W, et $U := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_k]$

alors $[\text{proj}_W] \overset{\text{par déf !}}{=} [\text{proj}_W]_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}} = U \cdot U^T$ ($U \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$)

Décomposition QR d'une matrice

Déf 11.38 On dit que $Q \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ est orthogonale si $Q^T \cdot Q = I_n$

Lemme 11.40 Soit $Q = [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n] \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Alors

Q est orthogonale $\Longleftrightarrow$ $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ est famille orthonormée

Noter la différence ici !

THM 11.65 Soit $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rang}(A) = n$. Alors, il existe des matrices $Q \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $R \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

telles que

(Q) Q est orthogonale (i.e. $Q^T Q = I_n$)

(R) R est triangulaire supérieure et

$R_{j,j} > 0, \ \forall j \in [\![1,n]\!]$

pas de condition

(i.e. $R = \begin{pmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & * \end{pmatrix}$ > 0)

(QR) $A = Q \cdot R$

On l'appelle décomposition QR de A.

En plus Q et R sont uniques.

Comment calculer Q et R ?

Pour $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$

(QR.1) $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ famille libre (base de $\mathrm{Img}(A)$) $\xrightarrow[GS]{}$ $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ bon de $\mathrm{Img}(A)$

(QR.2) $Q := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n]$

(QR.3) $R := Q^T . A$

EXM 11.67 | Calculer la décomposition QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\longleftarrow$ rang$(A) = 2$!